CONCOURS NATIONAL – MAROC - 1993
EHTP-EMI-ENIM-ENPL-ENSEM-ENSIAS-IAV-INPT
Epreuve d'analyse

Avertissement : il sera tenue compte de la rigueur des raisonnements ainsi que du soin apporté à la rédaction et à la présentation .

Soit E l'équation différentielle $\begin{cases} xy'' + y' - 4xy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

On appelle S l'ensemble des solutions de E , c'est à dire l'ensemble des fonctions y de **R** dans **R** deux fois dérivables telles que pour tout x de **R** , xy''(x) + y'(x) - 4xy(x) = 0 et vérifiant y(0)=1.
On appelle S' le sous ensemble des fonctions de S développables en série entière au voisinage de 0.

PARTIE I :

Question 1 Quel est l'ensemble D des x réels tels que la série de terme général $\frac{x^{2n}}{(n!)^2}$ converge ?

On appellera y_0 la fonction définie sur D par la somme de la série.
Le but du problème est de donner le comportement asymptotique de y_0 , à l'aide de deux méthodes différentes.
Les parties **II** ,**III** et **IV** sont indépendantes.

Question 2 Montrer que S' = $\{y_0\}$.

PARTIE II :

Question 1

a) Rappeler un théorème de cours qui permet de dire que $\int_1^x f(t)dt$ est négligeable devant $\int_1^x g(t)dt$, quand x tend vers + ∞ , f et g étant des fonctions continues sur [1, + ∞[.

b) Montrer que $\int_1^x \frac{e^{4t}}{t}dt = \frac{e^{4x}}{4x} - \frac{e^4}{4} + \frac{1}{4}\int_1^x \frac{e^{4t}}{t^2}dt$.

c) Donner un équivalent de $\int_1^x \frac{e^{4t}}{t}dt$ quand x tend vers + ∞ .

Question 2

a) Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \, C_n^{n-k} = C_{2n}^n$.

b) Montrer que : $\forall x \in \mathbf{R}$, $(y_0(x))^2 = \sum_0^{+\infty} \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!}\left(\frac{(2n)!}{(n!)^2 4^n}\right)^2$.

Question 3

On pose $u_n = \frac{n!e^n}{n^n\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$, pour $n \geq 1$.

a) Déterminer h dans $\mathbf{R}^+$ tel que v_n soit équivalent à $\frac{h}{n^2}$ quand n tend vers + ∞.

b) En déduire qu'il existe k > 0 tel que (u_n) tende vers k quand n tend vers + ∞.

c) Donner un équivalent de $w_n = \frac{(2n)!\sqrt{n}}{(n!)^2 4^n}$ quand n tend vers + ∞ , en fonction de k .

Question 4

Infty08

On définit h(x) = $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(4x)^{2n}}{(2n)!}\frac{1}{n}$.

Montrer que h est dérivable sur **R** et que h'(x) est équivalente à $\frac{e^{4x}}{x}$ quand x tend vers + ∞ .

Question 5

On admet le théorème :
" Soient (a_n) et (b_n) deux suites , strictement positives , équivalentes en + ∞ .
On suppose $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ de rayon de convergence égal à + ∞ .
On définit f(x) = $\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n x^n$ et g(x) = $\sum_{n=n_1}^{+\infty} b_n x^n$ pour x ∈ **R** .
Alors f est équivalente à g quand x tend vers + ∞ " .
Donner un équivalent de y_0 en + ∞ , en fonction de k (on utilisera les questions **1** , **2** , **3** et **4**) .

PARTIE III :

Question 1

On se fixe x > 0.

a) Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} e^{int}$ après avoir montré que la série convergeait pour tout t dans **R** .
On appelle f(x) la somme de la série .

b) Montrer que la fonction f est continue et calculer $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt$ (pour k dans **Z**) .

c) En utilisant l'identité de Parseval , montrer que :

$$y_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \exp(2x\cos t)dt .$$

Question 2

En faisant proprement le changement de variable cost = 1-$\frac{u^2}{2}$ sur [0 , $\frac{\pi}{2}$] , montrer que

$y_0(x) = \frac{\exp(2x)}{\pi\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{2x}} \frac{\exp(-v^2)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{4x}}}dx$ + R(x) où R est une fonction bornée sur [0 , +∞[.

Question 3

En admettant que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ montrer que $y_0(x)$ est équivalente à $\frac{\exp(2x)}{2\sqrt{\pi x}}$ en +∞ .

Question 4

a) Montrer que $\int_x^{+\infty} e^{-t^2}dt$ est équivalente à $\frac{e^{-x^2}}{2x}$ en + ∞ .

b) Montrer que ∀ $n \geq 0$ il existe $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ tels que :

Infty08

$y_0(x) = \frac{\exp(2x)}{\sqrt{x}}\left[\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + ... + \frac{\alpha_n}{x^n} + \frac{\varepsilon(x)}{x^{n+1}}\right]$ où ε est une fonction bornée de **R** dans **R** .

Calculer α_n sous forme d'intégrale ; calculer α_1 .

PARTIE IV :

Soit y une solution de E . On définit λ sur **R** par $\lambda(x) = \frac{y(x)}{y_0(x)}$.

a) Montrer que λ est définie , deux fois dérivable sur **R** et que λ' est solution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre (que l'on cherchera) et que $\lambda'(0) = 0$.

b) On suppose qu'il existe x_0 dans] 0, +∞[tel que $y(x_0) \neq y_0(x_0)$.

Montrer que λ' ne s'annule pas sur]0, +∞[. Chercher le signe de $\frac{\lambda''}{\lambda'}$ sur]0, +∞[.

c) En déduire que S = $\{y_0\}$.